ТЕМА 12. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Прямая на плоскости

Прямая ℓ может быть задана уравнением одного из следующих видов:

1) $Ax + By + C = 0$ – общее уравнение прямой;
2) $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ – уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ с заданным нормальным вектором $\vec{N} = (A, B)$;
3) $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n}$ – уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ с заданным направляющим вектором $\vec{s} = (m, n)$ (каноническое уравнение);
4) $\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \end{cases}$ $t \in (-\infty, +\infty)$ – параметрические уравнения прямой, которые в векторной форме имеют вид $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a} \cdot t,$ где $\vec{r}_0$ – радиус-вектор точки M_0, $\vec{s} = (m, n)$ – направляющий вектор прямой;
5) $y - y_0 = k(x - x_0)$ или $y = kx + b$ – уравнение прямой с угловым коэффициентом k, где $k = \operatorname{tg} \alpha$

Угол между двумя прямыми. Если прямые ℓ_1, ℓ_2 заданы следующими уравнениями:

$$\ell_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$\ell_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

то угол между прямыми (один из смежных углов) – это угол между нормальными векторами этих прямых. Следовательно,

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{N}_1, \vec{N}_2)}{|\vec{N}_1||\vec{N}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Если прямые ℓ_1 и ℓ_2 заданы уравнениями с угловым коэффициентом

$$\ell_1: y = k_1x + b_1,$$
$$\ell_2: y = k_2x + b_2,$$

то угол φ между прямыми находится по формуле

$$tg\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}.$$

Пример 14. В треугольнике ABC известны вершины A (2,-2), B (-1,1), C(1,4). Составить: уравнение стороны BC; уравнение высоты AH; уравнение медианы AD.

Решение:

1. Для составления уравнения стороны BC воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x - 1}{-1 - 1} = \frac{y - 4}{1 - 4} \Rightarrow 3x - 2y + 5 = 0.$$

Отсюда, в частности, следует, что $k_{BC} = \frac{3}{2}$, где k_{BC} – угловой коэффициент прямой BC.

2. Так как высота AH перпендикулярна стороне BC, то

$k_{AH} = -\frac{1}{k_{BC}} = -\frac{2}{3}$. Далее, точка A (2,–2) лежит на высоте AH. Следовательно, уравнение высоты AH вытекает из уравнения прямой, проходящей через точку с угловым коэффициентом, тогда имеем: $y+2 = -\frac{2}{3}(x-2) \Rightarrow 2x+3y+2=0.$

3. Так как AD – медиана треугольника ABC, то точка B делит сторону BC пополам. Следовательно, координаты точки D равны полусумме координат точек B и C, то есть D = $\left(\frac{-1+1}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(0, \frac{5}{2}\right).$

Теперь для составления уравнений медианы AD мы можем воспользоваться уравнением прямой, проходящей через две заданные точки:

$$\frac{x-2}{0-2} = \frac{y+2}{\frac{5}{2}+2} \Rightarrow \quad 4{,}5x+2y-5=0.$$

Плоскость и прямая в пространстве

Плоскость P в декартовой прямоугольной системе координат Oxyz может быть задана уравнением одного из следующих видов:

1. Ax + By + Cz + D = 0 – общее уравнение плоскости.
2. Ненулевой вектор N, перпендикулярный плоскости, называют ее нормальным вектором.

A $(x - x_0)$ + B $(y - y_0)$ + C $(z - z_0)$ = 0 – уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 (x_0, y_0, z_0) перпендикулярно нормальному вектору $\vec{N} = (A, B, C);$

3. $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$ – уравнение плоскости, проходящей через три точки M_1 (x_1, y_1, z_1), M_2 (x_2, y_2, z_2), M_3 (x_3, y_3, z_3).

Угол между плоскостями. Если плоскости P_1 и P_2 заданы уравнениями

$$P_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$P_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

то угол φ между плоскостями (один из двух двугранных углов) и угол между нормальными векторами этих плоскостей

$$\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1), \ \vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$$

определяется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{N}_1, \vec{N}_2)}{|\vec{N}_1||\vec{N}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Расстояние от точки до плоскости.

Пусть δ – расстояние от точки $M^*(x^*, y^*)$ до плоскости

P: $Ax + By + Cz + D = 0$. Тогда

$$d = \frac{\left|Ax^* + By^* + Cz^* + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Уравнения прямой в пространстве. 1. Прямая L в пространстве может быть задана общими уравнениями как пересечение двух непараллельных плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

2. Каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ с заданным направляющим вектором $\vec{s} = (m, n, p) \neq \vec{0}$:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

3. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

4. Параметрические уравнения:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \qquad t \in (-\infty, +\infty) \\ z = z_0 + pt, \end{cases}.$$

5. Параметрическое уравнение прямой в векторной форме $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{s}\cdot t,$ где $\vec{r}_0$ – радиус-вектор точки M_0, $\vec{s} = (m, n, p)$ – направляющий вектор прямой.

Переход от общих уравнений к каноническим. Пусть прямая L задана общими уравнениями:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Тогда в качестве направляющего вектора прямой L можно взять вектор

$$\vec{s} = [\ \vec{N}_1, \vec{N}_2\ ] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Угол между двумя прямыми. Пусть в пространстве даны две прямые:

$$L_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1};$$

$$L_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}.$$

Под углом между двумя прямыми понимают один из двух смежных углов, которые образуют прямые, проведенные параллельно данным через какую-либо точку пространства. Этот угол равен углу φ между направляющими векторами $\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1),\ \vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ данных прямых:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}_1\vec{a}_2}{|\vec{a}_1||\vec{a}_2|} = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Угол между прямой и плоскостью. Пусть в пространстве даны прямая и плоскость:

$$L: \frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p};$$

P: Ax + By + Cz + D = 0.

Тогда угол между прямой и плоскостью вычисляется по формуле

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве. Даны

прямая L и плоскость P уравнениями*:*

$$L_1: \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p},$$

P: Ax + By + Cz + D = 0.

Прямая и плоскость параллельны, если направляющий вектор **s** перпендикулярен нормальному вектору N :

$$\vec{s}(m,n,p) \perp \vec{N}(A,B,C) \Leftrightarrow Am + Bn + Cp = 0.$$

Прямая и плоскость перпендикулярны, если направляющий вектор **s** коллинеарен нормальному вектору **N**:

$$s \| \vec{N} \Leftrightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

Пример 1. Даны координаты вершин пирамиды АВСД:

А(0;–1;2), В(1;–2;3), С(–1;2;–1), Д(4;1;2). Найти:
а) уравнение плоскости Δ ABC;

б) уравнение высоты ДО пирамиды, длину высоты ДО;

в) угол между ребром АД и гранью АВС.

Решение:

1. Находим векторы: АВ = $\{1-0;-2-(-1);3-2\} = \{1;-1;1\}$;

АС = $\{-1-0;2-(-1);-1-2\} = \{-1;3;-3\}$.

Составим уравнение плоскости АВС, проходящей через три точки А,В,С. Пусть точка М(x,y,z) принадлежит искомой плоскости, тогда векторы АМ(x–0;y+1;z–2), АВ(1;–1;1), АС(–1;3;–3) компланарны.

Следовательно, (АМ, АВ, АС)=0 или
$$\begin{vmatrix} x-0 & y+1 & z-2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

Разложим определитель по элементам первой строки:
$$x \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} - (y+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + (z-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$
или 2(y +1) + 2(z –2) = 0,

где y + z –1 = 0 – уравнение искомой плоскости, откуда N(0;1;1;) – вектор, перпендикулярный искомой плоскости.

2. Так как ДО – высота, то направленный вектор прямой ДО вектор S_1 коллинеарен вектору N (0;1;1).

Уравнение прямой, проходящей через точку с направляющим вектором S(m,n,p), имеет вид
$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p},$$
поэтому уравнение ДО выглядит так:
$$\frac{x-4}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}.$$
Длину высоты ДО находим по формуле (9):
$$|ДО| = \frac{|0\cdot 4 + 1\cdot 1 + 1\cdot 2 - 1|}{\sqrt{0+1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

3. Угол между ребром АД и плоскостью АВС вычисляется по формуле (11), составим уравнение прямой АД:
$$\frac{x}{4} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{0},$$
тогда sin
$$\varphi = \frac{|4+2+1|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{16+4+0}} = \frac{6}{\sqrt{2\cdot\sqrt{20}}} \approx 0{,}94,\quad \varphi \approx 70^0$$

Пример 2. Даны три точки: А(0,–1,1), В(–2,3,2), С(1,1,–1). Составить уравнение плоскостей, проходящих:

1) через точку А перпендикулярно вектору $\vec{AB}$;
2) проходящей через три точки А,В,С.

Решение:

1.Уравнение плоскости Р получится как условие перпендикулярности векторов: $\vec{AB} = (-2,4,1)$ и $\vec{s} = (x, y+1, z-1)$. Так как $(\vec{AB}, \vec{s}) = 0$, то

$-2(x-3)+4(y+1)+(z-1)=0 \Rightarrow -2x+4y+z+9=0$.

2. Найдем уравнение плоскости, проходящей через точки А, В, С. Введем произвольную точку *M(x,y,z)* плоскости Р и вычислим вектор

$$\overrightarrow{AM}=(x,y+1,z-1).$$

Векторы $\overrightarrow{AB}=(-2,4,1)$ и $\overrightarrow{AC}=(1,2,-2)$ являются базисными векторами плоскости Р. Уравнение плоскости Р получится как условие линейной зависимости трех векторов:

$$(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\begin{vmatrix} x & y+1 & z-1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$-10x-3y-8z+5=0$.

Пример 3. Найти точку пересечения прямой $L:\{x=2t, y=4t+3, z=t-1\}$ и плоскости *P : x+2y+3z+10 =0.*

Решение. Нужно совместно решить их уравнения

$$\begin{cases} x=2t, \\ y=4t+3, \\ z=t-1. \\ x+2y+3z+10=0, \end{cases} \Rightarrow 1\cdot 2t+2(4t+3)+3(t-1)+10=0 \Rightarrow t=-1 \Rightarrow \begin{pmatrix} x=-2 \\ y=-1 \\ z=-2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, искомая точка М(–2,–1,–2).

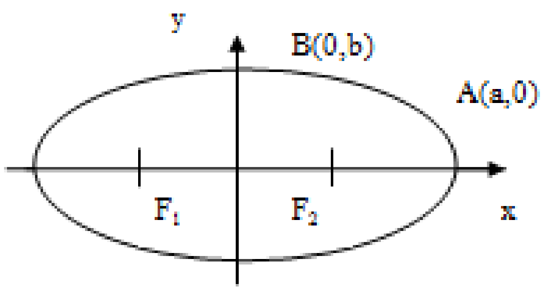
Кривые второго порядка

Кривой второго порядка называется линия, определяемая уравнением второй степени относительно текущих декартовых координат:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

Уравнение окружности с центром в точке *О(а,в)* и радиусом, равным *R:* $(x-a)^2+(y-в)^2=R^2$.

1. ***Эллипс.*** Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости (рис.2), для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек (фокусов) той же плоскости есть постоянная величина, и эта величина больше расстояния между фокусами.



Каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где a = OA – большая , b = OB – малая полуоси. Координаты фокусов эллипса:

$$F_1(-c,0), F_2=(c,0),$$

где $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

Эксцентриситетом эллипса е называют отношение фокусного расстояния **2c** к длине большей оси **2a**:

$$e = c/a \quad , e = \sqrt{1-(b/a)^2}.$$

Фокальным радиусом точки M эллипса называют отрезки прямых, соединяющих эту точку с фокусами F_1 и F_2 . Их длины r_1 и r_2 можно вычислить по формулам:

$$r_1 = a + ex, \; r_2 = a - ex.$$

3. ***Гипербола.*** Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости (рис. 3), для каждой из которых модуль разности расстояний до двух данных точек (фокусов) той же плоскости есть величина постоянная, и эта величина меньше расстояния между фокусами. Каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где a = OA – большая , b = OB – малая полуоси.
Координаты фокусов эллипса:

$$F_1(-C,0), F_2 = (C,0)$$

где $C = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Эксцентриситетом эллипса е называют отношение фокусного расстояния **2с** к длине большей оси **2а**:

$$e = c/a.$$

Асимптотами гиперболы называют прямые, определяемые уравнениями:

$$y = b/a\, x, \quad y = -b/a\, x.$$

Директрисами гиперболы называют прямые определяемые уравнениями:

$$x = -a/e, \quad x = a/e.$$

Гипербола с равными полуосями (b=a) называется равносторонней, ее каноническое уравнение имеет вид

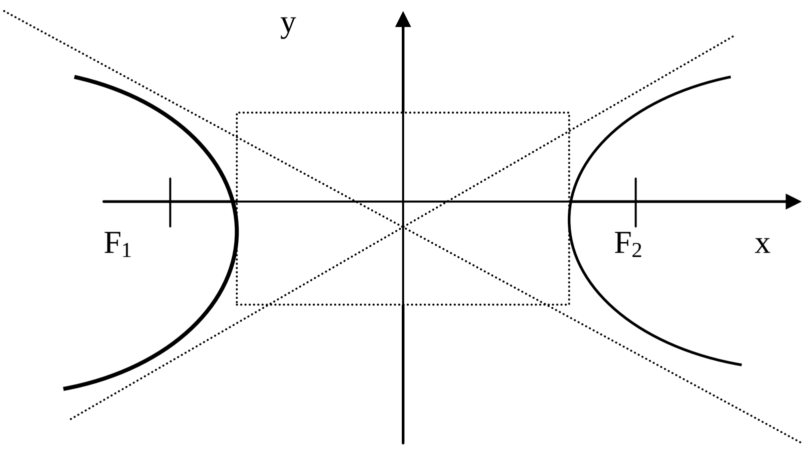
$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Фокальные радиусы точки правой ветви гиперболы вычисляются по формулам:

$$r_1 = ex + a, \quad r_2 = ex - a.$$

Фокальные радиусы точки левой ветви гиперболы вычисляются по формулам

$$r_1 = -ex - a, \quad r_2 = -ex + a.$$



4. ***Парабола.*** Параболой называют геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки (Фокса) и данной прямой (директрисы), лежащих в той же плоскости. Уравнение параболы, симметричной относительно оси O_x и проходящей через начало координат, имеет вид

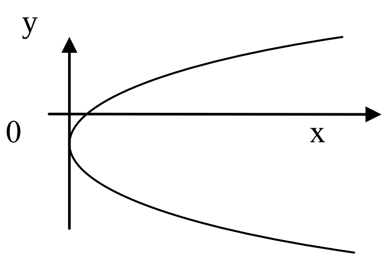
$$y^2 = 2px,$$

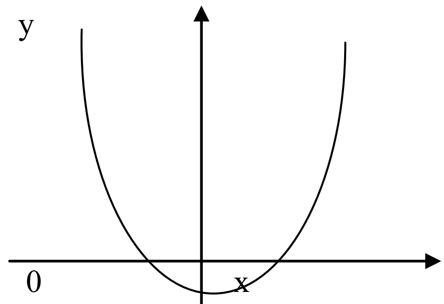
уравнение ее директрисы:

$$x = -p/2.$$

Парабола, определяемая уравнением, имеет фокус F(p/2,0), фокальный радиус ее точки M(x,y) вычисляется по формуле

$$r = x + p/2.$$





Парабола, симметричная относительно оси O_y и проходящая через начало координат, определяется уравнением

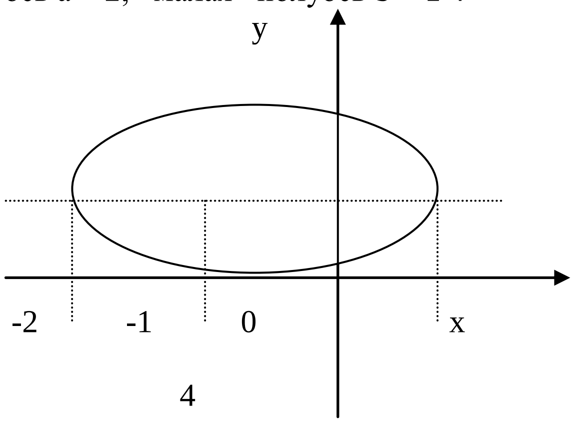
$$x^2 = 2py.$$

Пример 4. Привести к каноническому виду уравнение линии $x^2+4y^2+2x-16y+13=0$ и построить ее.

Решение. Дополним члены, содержащие x,и y, до полных квадратов. Получим $(x^2 + 2x + 1) + 4(y^2 - 4y + 4) - 1 - 16 + 13 = 0$, или $(x+1)^2 + 4(y-2)^2 = 4$,

$$\frac{(x+1)^2}{4} + (y-2)^2 = 1$$

, т.е. эллипс, центр которого лежит в точке C (−1,2), большая полуось a = 2, малая полуось b = 1 4



Вопросы для самопроверки

1. Как определяются в аналитической геометрии линии, поверхности и другие множества точек? Приведите примеры.
2. Как записываются параметрические уравнения прямой и плоскости?
3. Что называется угловым коэффициентом прямой на плоскости и каков его геометрический смысл в декартовой системе координат?

4. Как записывается уравнение прямой, проходящей через две точки, в пространстве и на плоскости?
5. Как записывается уравнение плоскости, проходящей через три точки?
6. Как вычисляются углы между прямыми (на плоскости и в пространстве), между двумя плоскостями, между плоскостью и прямой?
7. Каковы условия перпендикулярности и параллельности двух прямых (на плоскости и в пространстве), двух плоскостей, прямой и плоскости?
8. Каковы канонические уравнения эллипса, гиперболы и параболы?
9. Каковы геометрические свойства эллипса, гиперболы и параболы?
10. Что называется фокусами, директрисами и эксцентриситетом эллипса, гиперболы и параболы?
11. Что называется асимптотами гиперболы?